



TITLE:

On Tensor Matrices and Norm Inequalities (Common Ground between Functional Analysis and Mathematical Theory of Information)

AUTHOR(S):

高橋, 泰嗣; 加藤, 幹雄

CITATION:

高橋, 泰嗣 ...[et al]. On Tensor Matrices and Norm Inequalities (Common Ground between Functional Analysis and Mathematical Theory of Information). 数理解析研究所講究録 2002, 1253: 164-171

ISSUE DATE:

2002-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/41863>

RIGHT:

On Tensor Matrices and Norm Inequalities

岡山県立大情報工 高橋 泰嗣 (Yasuji Takahashi)

九州工大工 加藤 幹雄 (Mikio Kato)

Abstract. The operator norms of tensor matrices between ℓ_p^m -spaces were studied in G. Bennett [1]. We shall consider these norms between $\ell_p^m(X)$ -spaces (X -valued ℓ_p^m -spaces) for a Banach space X . The main theorem (Theorem 1) is stated as follows. Let A and B be $m \times n$ and $r \times s$ matrices respectively, and $A \otimes B$ their tensor product. Let X be an arbitrary Banach space. Then $\|A \otimes B\|_{p,q;X} \leq \|A\|_{p,q;X} \|B\|_{p,q;X}$ for any $1 \leq p \leq q \leq \infty$, where $\|A\|_{p,q;X} = \|A : \ell_p^m(X) \rightarrow \ell_q^n(X)\|$. The equality holds true if X is a Hilbert space (Theorem 2). As applications, from the classical Clarkson inequality we shall derive the generalized Clarkson inequality ([2]; cf. [11, 4, 6]) and the type p inequality with type constant 1 for L_p (cf. [5]).

G. Bennett は行列のテンソル積 $A \otimes B$ の作用素ノルムをスカラー・ケースで研究した。ここではそれを Banach 空間で考察し、ノルム不等式への応用を述べる。

定義 1. $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$, $r \times s$ 行列 B に対して

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \quad (mr \times ns \text{ 行列})$$

$1 \leq p, q \leq \infty$ に対して

$$\|A\|_{p,q} := \|A : \ell_p^m \rightarrow \ell_q^n\|$$

Banach 空間 X に対して

$$\|A\|_{p,q;X} := \|A : \ell_p^m(X) \rightarrow \ell_q^n(X)\|$$

明らかに, $\|A\|_{p,q} \leq \|A\|_{p,q;X}$.

定理 A (G. Bennett [1]). (i) $1 \leq p, q \leq \infty$ に対して

$$\|A \otimes B\|_{p,q} \geq \|A\|_{p,q} \|B\|_{p,q} \quad (1)$$

(ii) $1 \leq p \leq q \leq \infty$ に対して

$$\|A \otimes B\|_{p,q} \leq \|A\|_{p,q} \|B\|_{p,q} \quad (2)$$

すなわち

$$\|A \otimes B\|_{p,q} = \|A\|_{p,q} \|B\|_{p,q}. \quad (3)$$

Banach 空間 X に対して定理 A の拡張を考える. (2) は $p > q$ のときスカラー・ケースでさえ成立しない (cf. [1], Proposition 10.3) が, $p \leq q$ のとき, 任意の Banach 空間 X で成立する:

定理 1. $1 \leq p \leq q \leq \infty$ とする. 任意の Banach 空間 X に対して

$$\|A \otimes B\|_{p,q;X} \leq \|A\|_{p,q;X} \|B\|_{p,q;X} \quad (2_X)$$

(2_X) においてスカラー・ケースでは等号が成立するが, 一般の Banach 空間では等号は成立しない. 以下どのような空間 X で等号が成立するかを考察する.

補題 1. $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$ のとき, 任意の Banach 空間 X に対して

$$\|A\|_{p,q;L_r(X)} = \|A\|_{p,q;X}$$

とくに

$$\|A\|_{p,q;L_r} = \|A\|_{p,q}$$

定理 2. (i) $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$ とする. $X = L_r$ に対して

$$\|A \otimes B\|_{p,q;X} = \|A\|_{p,q;X} \|B\|_{p,q;X}$$

一般に X が finitely representable (f.r.) in L_r であればよい.

(ii) $1 \leq p \leq q \leq \infty$ とする. X が Hilbert 空間ならば

$$\|A \otimes B\|_{p,q;X} = \|A\|_{p,q;X} \|B\|_{p,q;X}$$

実際, (i) は (3) と補題 1 から得られる. また, Hilbert 空間は f.r. in L_r (無限次元) であるから (ii) は (i) の直接的な結果である. ただし,

X が f.r. in Y であるとは, X の任意の有限次元部分空間 M と任意の $\epsilon > 0$ に対して, 線形作用素 $T: M \rightarrow Y$ が存在して

$$(1 - \epsilon)\|x\| \leq \|Tx\| \leq (1 + \epsilon)\|x\| \quad (\forall x \in M)$$

が成り立つことである.

定理 2 (ii) の逆について次の結果が得られる.

定理 3. X が Hilbert 空間であるための必要十分条件は, X の任意の有限次元部分空間 Y と任意の ± 1 行列 A, B に対して

$$\|A \otimes B\|_{2,2;Y} = \|A\|_{2,2;Y} \|B\|_{2,2;Y}$$

が成立することである.

注. (i) A, B は Littlewood 行列に限定してもよい.

(ii) X が無限次元のとき

$$\|A \otimes B\|_{2,2;X} = \|A\|_{2,2;X} \|B\|_{2,2;X}$$

が成立しても, X が Hilbert 空間とは限らない (定理 4 参照).

定理 4. $1 \leq p, q \leq \infty$ とする. ℓ_1 が f.r. in X (とくに $X = L_1, L_\infty$) ならば, すべての ± 1 行列 A, B に対して

$$\|A \otimes B\|_{p,q;X} = \|A\|_{p,q;X} \|B\|_{p,q;X}$$

以下, 定理 1 を Littlewood 行列, Rademacher 行列に適用して, L_p に対する一般 Clarkson 不等式, type 不等式を導く.

次の行列 A_n を **Littlewood 行列** という ([10]):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & -A_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$A_{n+1} = A_1 \otimes A_n$ より, 定理 1 を適用して,

$$\|A_n\| \leq \|A_1\|^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

これより, Clarkson 不等式から次の一般 Clarkson 不等式が得られる
 ことを見よう.

系 1 (Generalized Clarkson's inequality) ([2, 4, 6, 7, 8, 9]).
 $1 \leq p \leq 2$, $1/p + 1/p' = 1$ とする. $A_n = (\epsilon_{ij})$ を Littlewood 行列と
 するとき, 次が成立.

(i) 任意の $n \in \mathbf{N}$ と任意の $f_1, f_2, \dots, f_{2^n} \in L_p$ に対して

$$\left\{ \sum_{i=1}^{2^n} \left\| \sum_{j=1}^{2^n} \epsilon_{ij} f_j \right\|_p^{p'} \right\}^{1/p'} \leq 2^{n/p'} \left\{ \sum_{j=1}^{2^n} \|f_j\|_p^p \right\}^{1/p}. \quad (5)$$

(ii) $1 \leq r, s \leq \infty$ とする. 任意の $n \in \mathbf{N}$ と任意の $f_1, f_2, \dots, f_{2^n} \in L_p$
 に対して

$$\left\{ \sum_{i=1}^{2^n} \left\| \sum_{j=1}^{2^n} \epsilon_{ij} f_j \right\|_p^s \right\}^{1/s} \leq 2^{nc(r,s;p)} \left\{ \sum_{j=1}^{2^n} \|f_j\|_p^r \right\}^{1/r} \quad (6)$$

ここで

$$c(r, s; p) = \begin{cases} 1/r' + 1/s - 1/p' & \text{if } p \leq r \leq \infty, 1 \leq s \leq p', \\ 1/s & \text{if } 1 \leq r \leq p, 1 \leq s \leq r', \\ 1/r' & \text{if } s' \leq r \leq \infty, p' \leq s \leq \infty. \end{cases}$$

また, (5), (6) は L_p -norm を $L_{p'}$ -norm に置きかえて成立する.

Clarkson 不等式:

(i) $1 < p \leq 2$. $\forall f, g \in L_p$

$$(\|f + g\|_p^{p'} + \|f - g\|_p^{p'})^{1/p'} \leq 2^{1/p'} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)^{1/p} \quad (7)$$

(ii) $2 \leq q < \infty$. $\forall f, g \in L_q$

$$(\|f + g\|_q^q + \|f - g\|_q^q)^{1/q} \leq 2^{1/q} (\|f\|_q^{q'} + \|g\|_q^{q'})^{1/q'} \quad (8)$$

は Littlewood 行列 A_1 を用いてそれぞれ次のように表現される:

$$\|A_1\|_{p,p';L_p} = \|A_1 : \ell_p^2(L_p) \rightarrow \ell_{p'}^2(L_p)\| \leq 2^{1/p'}, \quad (9)$$

$$\|A_1\|_{q',q;L_q} = \|A_1 : \ell_{q'}^2(L_q) \rightarrow \ell_q^2(L_q)\| \leq 2^{1/q}. \quad (10)$$

(10) で $q = p'$ とおくと

$$\|A_1\|_{p,p';L_{p'}} = \|A_1 : \ell_p^2(L_{p'}) \rightarrow \ell_{p'}^2(L_{p'})\| \leq 2^{1/p'} \quad (10^*)$$

となる. したがって (9) と (10), すなわち (7) と (8) は Banach 空間 X に対する不等式として次のように統一される.

$$\|A_1\|_{p,p';X} = \|A_1 : \ell_p^2(X) \rightarrow \ell_{p'}^2(X)\| \leq 2^{1/p'}, \quad (9_X)$$

すなわち

$$(\|x + y\|_X^{p'} + \|x - y\|_X^{p'})^{1/p'} \leq 2^{1/p'} (\|x\|_X^p + \|y\|_X^p)^{1/p}. \quad (7_X)$$

以上の考察から, Clarkson 不等式 (7), (8) は $X = L_p$ と $X = L_{p'}$ に対する同一の不等式 (7_X) に他ならない. また, ${}^t A_1 = A_1$ に注意すれば (9_X) において X をその双対空間 X' で置き換えても同値. すなわち $1/p + 1/q = 1$ のとき Clarkson 不等式 (7), (8) は同値である. したがって Clarkson 不等式は一般に $1 \leq p \leq 2$ の場合を考察すれば十分である.

上と同様の考察により, $1 \leq p \leq 2$ の場合, 一般 Clarkson 不等式 (5) は

$$\|A_n\|_{p,p';L_p} = \|A_n : \ell_p^{2^n}(L_p) \rightarrow \ell_{p'}^{2^n}(L_p)\| \leq 2^{n/p'}$$

と同値である. したがって (4) によって

$$\|A_n\|_{p,p';L_p} \leq (\|A_1\|_{p,p';L_p})^n \leq (2^{1/p'})^n = 2^{n/p'}$$

このことは一般 Clarkson 不等式 (5) が古典的 Clarkson 不等式 (7) から導かれることを示している.

注. (i) Clarkson 不等式 (7) は特別な場合として一般 Clarkson 不等式 (5) に含まれる ($n=1$ の場合). また (5) と (6) は同値であるから (cf. [2, 4]), Clarkson 不等式と一般 Clarkson 不等式は同値である.

(ii) $X = L_p$ (無限次元), $1 \leq p, r, s \leq \infty$ とするとき, 任意の Littlewood 行列 A_m, A_n に対して

$$\|A_m \otimes A_n\|_{r,s;X} = \|A_m\|_{r,s;X} \|A_n\|_{r,s;X}$$

が成り立つ. ただし, X が有限次元のときは成立しない (定理 3 注参

次に L_p の type 不等式を Clarkson 不等式から導こう.

定義 2 (cf. [12]). X を Banach 空間とし $1 < p \leq 2$ とする. ある定数 M と s ($1 \leq s < \infty$) が存在して

$$\left\{ \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) x_j \right\|^s dt \right\}^{1/s} \leq M \left\{ \sum_{j=1}^n \|x_j\|^p \right\}^{1/p} \quad (11)$$

が任意の有限列 $\{x_j\} \subset X$ に対して成り立つとき, X は type p であるという. ここで $r_j(t)$ は Rademacher 関数, すなわち $r_j(t) = \text{sgn}(\sin 2^j \pi t)$ である. Khinchine-Kahane の不等式によれば, s ($1 \leq s < \infty$) は任意の値をとって同値 (定数 M は変動する). (11) をみたす最小の M を $T_{p(s)}(X)$ で表し, X の type $p(s)$ 定数という.

定義 3. 次のように定義される行列 R_n を **Rademacher 行列** いう ([3, 4]):

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad R_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} & R_n \\ \hline \begin{matrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{matrix} & -R_n \end{array} \right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

補題 2 ([3, 4]). $1 < p \leq 2$ とする. Banach 空間 X に対して, 次は同値.

- (i) X は type p .
- (ii) ある定数 $M > 0$ が存在して

$$\|R_n : \ell_p^n(X) \rightarrow \ell_p^{2^n}(X)\| \leq M 2^{n/p'} \quad \text{for } n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

系 2. $1 < p \leq 2$ とする. L_p は type p で, $T_{p(p')}(L_p) = 1$.

実際, R_{n+1} は $R_1 \otimes A_n$ の submatrix であるから, 定理 1 より

$$\begin{aligned} & \|R_{n+1} : \ell_p^{n+1}(L_p) \rightarrow \ell_p^{2^{n+1}}(L_p)\| \\ & \leq \|R_1 \otimes A_n : \ell_p^{2^n}(L_p) \rightarrow \ell_p^{2^{n+1}}(L_p)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|R_1 : \ell_p^1(L_p) \rightarrow \ell_{p'}^2(L_p)\| \cdot \|A_n : \ell_p^{2^n}(L_p) \rightarrow \ell_{p'}^{2^n}(L_p)\| \\
&\leq 2^{1/p'} (\|A_1\|_{p,p';L_p})^n \\
&\leq 2^{1/p'} \cdot 2^{n/p'} = 2^{(n+1)/p'}.
\end{aligned}$$

L_p を $L_{p'}$ で置きかえると $L_{p'}$ も type p で $T_{p(p')}(L_{p'}) = 1$ であることが分かる.

一般に, type p 不等式 (type $p(p')$ 定数=1), Clarkson 不等式, 一般 Clarkson 不等式は互いに同値であることが知られている:

定理 5 ([5, 4]). $1 < p \leq 2$, $1/p + 1/p' = 1$ とする. Banach 空間 X に対して次は同値.

(i) (p, p') -Clarkson 不等式 (7) が X で成立. すなわち

$$\|A_1\|_{p,p';X} = \|A_1 : \ell_p^2(X) \rightarrow \ell_{p'}^2(X)\| \leq 2^{1/p'}$$

(ii) $(p, p'; n)$ -Clarkson 不等式 (5) が X で成立. すなわち

$$\|A_n\|_{p,p';X} = \|A_n : \ell_p^{2^n}(X) \rightarrow \ell_{p'}^{2^n}(X)\| \leq 2^{n/p'}$$

(iii) 一般 Clarkson 不等式 (6) が X で成立. すなわち

$$\|A_n\|_{r,s;X} = \|A_n : \ell_r^{2^n}(X) \rightarrow \ell_s^{2^n}(X)\| \leq 2^{nc(r,s;p)}$$

(iv) X は type p で $T_{p(p')}(X) = 1$. すなわち

$$\|R_n\|_{p,p';X} = \|R_n : \ell_p^n(X) \rightarrow \ell_{p'}^{2^n}(X)\| \leq 2^{n/p'}$$

References

- [1] G. Bennett, Schur multipliers, Duke Math. J. **44** (1977), 603-639.
- [2] M. Kato, Generalized Clarkson's inequalities and the norms of the Littlewood matrices, Math. Nachr. **114** (1983), 163-170.
- [3] M. Kato, K. Miyazaki and Y. Takahashi, Type, cotype constants for $L_p(L_q)$, norms of the Rademacher matrices and interpolation, Nihonkai Math. J. **6** (1995), 81-95.

- [4] M. Kato, L. E. Persson and Y. Takahashi, Clarkson type inequalities and their relations to the concepts of type and cotype, *Collect. Math.* **51** (2000), 327-346.
- [5] M. Kato and Y. Takahashi, Type, cotype constants and Clarkson's inequalities for Banach spaces, *Math. Nachr.* **186** (1997), 187-196.
- [6] M. Kato and Y. Takahashi, Some recent results in the Banach space geometry and related norm inequalities, *Publicaciones del Departamento de Analisis Matematico* **46**, Universidad Complutense de Madrid, pp. 105-122, 2000.
- [7] L. Maligranda and L. E. Persson, On Clarkson's inequalities and interpolation, *Math. Nachr.* **155** (1992), 187-197.
- [8] L. Maligranda and L. E. Persson, Inequalities and interpolation, *Collect. Math.* **44** (1993), 181-199.
- [9] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1993.
- [10] A. Pietsch, Absolutely- p -summing operators in L_r -spaces II, *Sem. Goulaouic-Schwartz*, Paris, 1970/1971.
- [11] A. Tonge, Random Clarkson inequalities and L_p -version of Grothendieck's inequality, *Math. Nachr.* **131** (1987), 335-343.
- [12] P. Wojtaszczyk, *Banach spaces for analysts*, Cambridge Univ. Press., Cambridge-New York-Melbourne, 1991.

*Department of System Engineering,
Okayama Prefectural University,
Soja 719-1197, Japan
e-mail: takahasi@cse.oka-pu.ac.jp*

*Department of Mathematics,
Kyushu Institute of Technology,
Kitakyushu 804-8550, Japan
e-mail: katom@tobata.isc.kyutech.ac.jp*